

C_N 群上对称结构的双协调模态综合

复旦大学 王文亮 上海船舶运输科学研究所 朱农时 胥加华

【摘要】 在结构完整性研究中实施模态分析的成功程度颇大地取决于提取结构主模态的能力。本文提出一种新的方法, 它把群论算法与双协调子结构法组合起来去分析回转对称 C_N 结构。通过在保证精度的条件下消去子结构之间的自由度和波传播自由度, 大幅度地减缩综合的规模, 从而提高了提取效率。文末, 给出了一个算例, 以各种方法所得结果的比较, 来阐明本方法的优越性。

一、前言

工程中存在不少回转对称结构。各类塔架、发电机的端部绕组, 地面或机载的抛物面天线, 航空发动机的盘—叶片系统等便是一些典型的例子。回转对称结构的静力问题, 固有振动问题和强迫响应问题的研究文献甚多, 其中不少工作是大同小异的。归纳起来总的指导思想是简化为整体系统的 $1/N$ 加以分析, 这个原结构的 $1/N$ 部分常被叫做扇区。对于大型复杂的回转对称结构的精细有限元分析, 它的扇形区域仍然有很多自由度, 并且彼此耦合, 最后形成的联立方程的规模很大, 依然难以或不宜于一次求解。这就促使人们去研究在扇区上运用动态子结构方法。文献 [1] 是这类研究取得成功之一例, 不过它是针对 C_{Nv} 群上对称结构的。这种结构除有回转对称性外, 还兼有镜象对称性, 故可称为镜象回转对称结构, 同时把无镜象对称性的回转对称结构称为 C_N 群上对称结构。在国外, Henry 和 Ferraris^[2] 对重复的一个典型扇区运用 Hurty - Craig 的固定界面模态综合技术。该方法适用于 C_N 群上对称结构, 这是一个进步。但由于因袭了 Craig 的子结构法的固有缺点, 即需保留子结构的全体内连自由度作为最终的综合座标, 这就使得联立方程规模的压缩受到严重限制。虽然 Henry 和 Ferraris 通过巧妙地选择扇形区域, 使上述内连自由度部分与波传播边界上的自由度相重合, 再利用波传播条件把它们消除掉, 但毕竟潜力有限, 不能从根本上克服 Craig 方法的缺点。文献 [3] 克服了上述缺点, 使模态综合效率获得更大的提高, 但仍未消去波传播自由度。本文采用双协调动态子结构法^[4] 于一个典型的扇形区域, 可以在保证综合精度的前提下既消去子结构之间全部对接自由度又消去波传播自由度, 从而使联立方程的规模被极大地减缩。文末的算例通过三种方法所得结果的比较, 阐明了本方法的有效性。

二、 C_N 结构的双协调模态综合

如果结构存在这样一条对称轴, 当结构绕此轴每旋转一个角度 α , 结构与旋转以前完全相同 (包括材料常数 μ 、 ρ 、 E 等相同), 这种结构称为回转对称结构。符合这一条件的最小 α 角, 称为回转周期。令 $N = 2\pi/\alpha$, N 必为一整数, 称为回转对称的阶数。从群论观点来看它关于

C_N 群上对称, 故又简称 C_N 结构。

对 N 阶回转对称结构, 可用不同方式把它划分为 N 个完全相同的子区域, 即扇区。

本文将高效的动态子结构法, 推广运用于 C_N 结构上的这种典型扇区之中, 从而把双协调法融会于群论算法, 导致一个分析大型复杂回转对称结构的新方法。双协调动态子结构法与静力有限元法中的双协调元类同。静力问题中的双协调元在不少情况下精度较高, 曾被称作“高精度单元”。在动力问题中, 双协调子结构亦具有类似优点。其根本作用是把引入静力模态 (或准静力模态) 所增加的座标数, 从综合方程中全数消尽, 这样既提高了综合精度, 又不增加“综合系统”中座标的个数。

以盘—片系统为例, 来展示 C_N 结构模态综合步骤。把结构分割成 $\alpha=1, 2, \cdots, \sigma$ 个子结构, 并用它们各自的自由界面主模态 (包括 s 个刚体模态, $0 \leq s \leq 6$) 和剩余模态来描述其位形。

盘—片系统的扇区划分、单元划分和专用座标系如文献 [3] 所述。现取出一个扩充的基本扇区 S 进行研究, 参见图 1。

1. 子结构的模态信息 计算并装配子结构的总质量和总刚度矩阵:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{ii} & \underline{k}_{ib} \\ \underline{k}_{bi} & \underline{k}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} \underline{m}_{ii} & \underline{m}_{ib} \\ \underline{m}_{bi} & \underline{m}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \underline{\delta} = [\underline{\delta}_i \quad \underline{\delta}_b]^T \quad (1)$$

自由界面主模态 (Φ_{II}, Ω_I): 放松子结构的对接界面, 则有

$$\underline{k}\Phi_{II} = \underline{m}\Phi_{II}\Omega_I, \quad \Phi_{II}^T \underline{m}\Phi_{II} = \underline{I}_{II}, \quad \Phi_{II}^T \underline{k}\Phi_{II} = \Omega_I \quad (2)$$

剩余模态 χ_{db} : 剩余惯性释放附着模态 χ_{db} 由下式确定

$$\chi_{db} = \underline{G}_{dd} \underline{F}_{db} \quad (3a)$$

$$\underline{F}_{db}^T = [\underline{Q}_{db}^T \underline{L}_{bb}] \quad (3b)$$

$$\underline{G}_{dd} = \underline{p}^T \underline{\tilde{G}}_p - \underline{\Phi}_{II}^T \underline{\Omega}_{dd}^{-1} \underline{\Phi}_{II} \quad (3c)$$

$$\underline{p} = \underline{L} - \underline{m}\Psi_{ds}\Psi_{ds}^T \quad (3d)$$

其中, d, l 和 b 分别是子结构的总自由度数, 保留的主模态个数和界面自由度数。注意, 这里所指的界面,

除了相邻子结构间的交接面外还包括波传播面 w 和 w' (参见图 1) 在内, 并且假设各个界面互不迭接。如果子结构带有波传播面, 则要求其左波传播面 w' 和右波传播面 w 成回转对称。方程 (3) 中, $\underline{G}_{dd}$ 是子结构的剩余柔度矩阵, $\underline{p}$ 是投影矩阵, Ψ_{ds} 是刚体模态矩阵, $\underline{\tilde{G}}$ 是专用柔度矩阵^[3]。

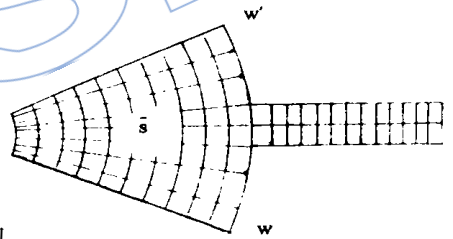


图 1 盘—片系统的一个基本扇区

2. 座标变换 模态代入变换: 把每个自由子结构的有限元结点座标转换为模态座标

$$\underline{\delta} = \underline{\Phi}_{II}\underline{\xi} + \underline{\chi}_{db}\underline{f}_b \quad (4)$$

在模态座标

$$\underline{p}^T \underline{S} = [\underline{\xi}^T \quad \underline{f}_b^T] \quad , \quad S = l + b \quad (5)$$

下的质量矩阵, 刚度矩阵和广义力列阵分别是

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{L}_l & \underline{a} \\ \underline{a} & \underline{\mu}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_l & \underline{o} \\ \underline{o} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{P}_s = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{II}^T \\ \underline{\chi}_{db}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{f}_b \quad (7)$$

其中, $\underline{f}_b$ 是子结构受到的界面力。一般

$$\underline{f}_b^T = [\underline{f}_z^T \quad \underline{f}_w^T \quad \underline{f}_w^T] \quad , \quad b = z + w + w' = z + 2w \quad (8)$$

注意, 如果子结构不带波传播面, 则上述列阵到虚线为止。双协调装配: 引进扩充扇区 $\bar{s}$ 的界面力显示列阵

$$\underline{F}_B^T = [\underline{F}_z^T \quad \underline{F}_w^T] \quad (9)$$

于是界面力的协调可表示为

$$^{(\alpha)}\underline{f}_b = ^{(\alpha)}\underline{a}_{bB} \cdot \underline{F}_B \quad (10)$$

上式中矩阵 $^{(\alpha)}\underline{a}_{bB}$ 的显式, 依据如下变换 (在波传播面上)

$$^{(\alpha)}\underline{f}_w' = \underline{f}_w \cdot \exp(i\beta) \quad (11)$$

和牛顿第三定律 (在相邻子结构的交接面上) 写出。这里, $i = \sqrt{-1}$, $\beta = r \cdot 2\pi/N$ 。因此, 可选用广义座标

$$\underline{\eta} = [\underline{\xi}^T \quad \underline{F}_B^T] \quad , \quad u = L + B \quad ; \quad \underline{\xi}_L = \text{col}\{^{(\alpha)}\underline{\xi}_l\} \quad , \quad L = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} ^{(\alpha)}l \quad (12)$$

与此相应的 C_N 结构的质量矩阵、刚度矩阵分别是

$$\underline{\mu}_{uu}(\beta_r) = \begin{bmatrix} L_{LL} & 0 \\ 0 & \underline{\mu}_{BB}(\beta_r) \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\kappa}_{uu}(\beta_r) = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_L & 0 \\ 0 & \underline{\kappa}_{BB}(\beta_r) \end{bmatrix} \quad (13a)$$

其中

$$\underline{\kappa}_{BB}(\beta_r) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} ^{(\alpha)}(\underline{a}_{bB}^* \underline{X}_{bb} \underline{a}_{bB}) \quad , \quad \underline{\mu}_{BB}(\beta_r) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} ^{(\alpha)}(\underline{a}_{bB}^* \underline{\mu}_{bb} \underline{a}_{bB}) \quad , \quad \underline{\Omega}_L = \text{diag}(^{(\alpha)}\underline{\Omega}_l) \quad (13b)$$

“*”表示共轭转置。

显见, $\underline{\kappa}_{uu}$ 和 $\underline{\mu}_{uu}$ 都是 Hermite 矩阵, 相应的广义力列阵是

$$\underline{G}_u(\beta_r) = \begin{bmatrix} \underline{G}_{LB} \\ \underline{G}_{BB} \end{bmatrix} \underline{F}_B \quad , \quad \underline{G}_{LB}(\beta_r) = \text{col}\{^{(\alpha)}\underline{\Phi}_L^T \underline{a}_{bB}(\beta_r)\} \quad , \quad (14)$$

$$\underline{G}_{BB}(\beta_r) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} ^{(\alpha)}(\underline{a}_{bB}^* \underline{X}_{bb} \underline{a}_{bB})$$

由于, $\underline{\kappa}_{bb}^T = \underline{\kappa}_{bb} = \underline{X}_{bb}^T \underline{X}_{bb} = \underline{X}_{bb} = \underline{X}_{bb}^T$, 故有

$$\underline{G}_{BB}(\beta_r) \equiv \underline{\kappa}_{BB}(\beta_r) \quad (15)$$

当结构处于自由谐振状态时, 位移协调的充要条件是广义力在相应广义位移上所作功之和为零, 即 $\underline{G}_u^* \cdot \underline{\eta}_u = 0$, 或者 $\underline{F}_B^T \begin{bmatrix} \underline{\xi}_L \\ \underline{F}_B \end{bmatrix} = 0$ 。注意到 $\underline{F}_B \neq 0$, 于是有

$$\underline{F}_B = - \underline{\kappa}_{BB}^{-1} \underline{G}_{LB}^* \underline{\xi}_L \quad (16)$$

据此, 则有

$$\underline{\eta}_u = \begin{bmatrix} L_{LL} \\ - \underline{\kappa}_{BB}^{-1} \underline{G}_{LB}^* \end{bmatrix} \underline{\xi}_L \quad (17)$$

遵照功能不变原理, 可完全类似地推导出在独立座标 $\underline{\xi}_L$ 下结构的质量阵和刚度阵分别为

$$\underline{\mathcal{M}}(\beta_r) = L_{LL} + \underline{G}_{LB} \underline{\kappa}_{BB}^{-1} \underline{\mu}_{BB} \underline{\kappa}_{BB}^{-1} \underline{G}_{LB}^* \quad (18)$$

$$\underline{\mathcal{K}}(\beta_r) = \underline{\Omega}_L + \underline{G}_{LB} \underline{\kappa}_{BB}^{-1} \underline{G}_{LB}^*$$

相应的广义力显然恒等于零。

至此, 我们已把 C_N 结构的特征值问题简化为一组更低阶的 Hermite 矩阵对的相应问题

$$[\mathbf{f}(\beta_r) - \omega^2 \mathbf{e}(\beta_r)] \xi_L = 0 \tag{19}$$

从特征方程 (19) 提取 C_N 结构第 r 既约表示子空间的主模态, 然后不难通过一系列的回代运算而获得其物理模态形状。

最后, 我们着重指出, 特征方程 (19) 中的广义坐标列阵 ξ_L 仅由各个子结构的自由界面主模态坐标⁽⁹⁾ ξ_α ($\alpha = 1, 2, \cdots, \sigma$) 所组成。它既不包含子结构之间的对接自由度, 又不包含波传播自由度。

三、算 例

图 2 是一个 C_4 群上对称的自由-自由板状结构, 它共有 3 个刚体自由度。按有限群表示论中有关结论, 沿 z 方向的刚体平移模态应该在 $r = 0$ 既约表示子空间中, 而分别绕 x 轴和 y 轴旋转的刚体模态则应隶属于 $r = 1$ 既约表示子空间之中。这个算例用来考察本方法在综合自由-自由回转对称结构主模态时的有效性, 所得数值结果完全与上述结论相吻。

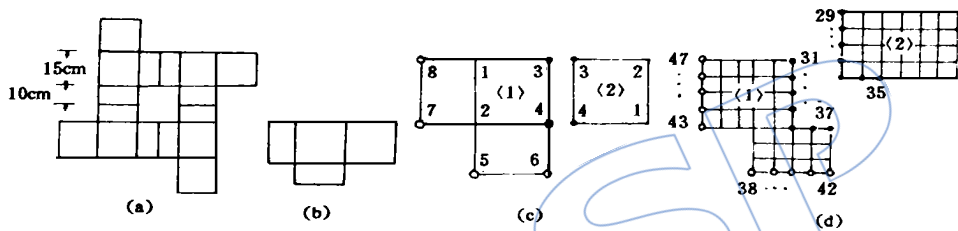


图 2 C_4 群上对称的自由-自由板状结构
(a. 自由结构; b. 基本扇区; c. 子结构 (粗网格); d. 子结构 (细网格))

图 2 (a) 和 (b) 分别表出了整体结构和它的一个基本扇区。将该扇区用二种不同的分划, 形成两个子结构, 如图 2 (c) 与 (d) 所示。除分划法不同外 (c) 中采取了较粗的有限元网格, 以便在同样的网格配置下把本方法的结果与有限元整体解法和单纯群论算法的结果比较。(d) 则采取了很细的有限元网格。在这样的网格配置下, 单纯群论法的介题规模已经颇大, 而整体有限元解法则更事倍功半。

该算例模型的几何尺度如图 2 所示。弹性模量 E 取 0.2058×10^{12} , 泊松比 μ 取 0.3, 材料密度 ρ 取 7800。粗网格配置下, 子结构 (1) 共有 8 个结点, 结点 3、4 是共用 (对接) 结点, 结点 5、6 处在波传播界面 w 上, 结点 7、8 处在波传播界面 w' 上。子结构 (2) 共有 4 个结点、结点 3、4 在对接界面上, 它无波传播自由度。子结构 (1) 和 (2) 均仅保留其前 5 阶自由界面主模态 (其中, 最低 3 阶是刚体模态) 来参与综合; 总计 12 个剩余模态 (每个子结构 6 个) 利用双协调对接条件把这几全数消去。因此, 最终的综合方程是一个 10 阶矩阵特征值问题。

在图 2 (d) 的细网格下, 子结构 (1) 共有 47 个结点, 其中结点 31~37 是对接点, 38~42 处在波传播界面 w 上, 结点 43~47 则处在波触界面 w' 上。子结构 (2) 共有 35 个结点, 其中 29~35 结点依次与子结构 (1) 的 31~37 结点相接, 它们没有波传播自由度。子结构 (1) 与 (2) 均保留其前 8 阶自由界面主模态 (其中最低 3 阶是刚体模态) 参与综合。总计 42 个剩余模态 (每子结构 21 个) 利用双协调对接条件把它们全部消去。因此, 最终是一个 16 阶的矩阵特征值问题。

按群论算法, 在 $N = 4$ 时, 我们仅需对于 $r = 0, 1$ 和 2 求解相应的特征方程。其中 $r = 0$ 和

2 是实对称矩阵的广义特征值问题，它们分别是各个扇区同相位或相邻扇区反相位的单频自由振动，而 $r=1$ 则是 Hermite 矩阵的广义特征值问题。

表 1 列出了各种解法的数值结果。比较这些结果，本方法的综合精度与效率是明显可见的。曾用该方法计算了某航空发动机压气机 I 级盘—片耦合系统的固有模态，也有满意的结果。

表 1 各种解法的数值结果 (频率)

方法	有限元整体解	群论算法解	本方法解	
网格	粗网格	粗网格	粗网格	细网格
$r=0$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$r=0$	1.58316	1.58316	1.58317	1.51424
$r=0$	5.37074	5.37074	5.37135	5.11406
$r=0$	7.54456	7.54456	7.55100	7.51227
$r=1$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$r=1$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$r=1$	2.54640	2.54640	2.54644	2.47994
$r=1$	2.54640	2.54640	2.54644	2.47994
$r=1$	5.27414	5.27414	5.27502	5.05770
$r=1$	5.27414	5.27414	5.27502	5.05770
$r=1$	9.18485	9.18485	9.19178	8.86068
$r=1$	9.18485	9.18485	9.19178	8.86068
$r=2$	0.88707	0.88707	0.88707	0.86840
$r=2$	2.00091	2.00091	2.00091	1.99973
$r=2$	5.12254	5.12254	5.12343	5.02589
$r=2$	8.84908	8.84908	8.86000	8.21406

参 考 文 献

[1] 张锦、王文亮、陈向钧，“带有 N 条叶片的轮盘耦合系统的主模态分析—C_{NV}群上对称结构的模态综合”，第 16 届国际理论与应用力学大会 (ICTAM) 中国学者论文集锦，中国力学学会编 (1986) 75。

[2] Henry, R., Ferraris, G., “ASME J Eng Gas Turb Power”, 106 (1984) 2.

[3] 王文亮、罗惟德、王皓，“盘—片耦合系统振动和应力分析程序系统”，航空发动机结构完整性研究报告，复旦大学应用力学系，1989 年。

[4] 王文亮、杜作润，“结构振动与动态子结构方法”，复旦大学出版社，1985 年。

A SUPPLEMENTARY ALGORITHM FOR LUG TOOTH CONTACT ANALYSIS

Pen Kejian and Sheng Yuansheng

(*Shenyang Institute of Aeronautical Engineering*)

Zheng Guanghua

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

According to the principles of the inequality variations, the existence and the uniqueness of the solution have been verified for elastic contact problems, which contain friction forces between the contact surfaces. Thus the contact problems are made to be equivalent to the quadratic programming problems. By using the basic idea of supplement, the objects of a contact system is discretized and then lumped to the contact boundaries, then a resultant stiffness matrix is formed and a linear supplementary equation of non-negative variables, $U \text{ and } \lambda$, is also derived in the light of the non-penetration condition of the normal displacements of the contact surfaces and the Coulumb friction law, etc. By the direct use of the Lemke algorithm of quadratic programming method, the scope of solution is limited to the contact boundaries. The whole field information is therefore obtained from further solution of the subelements. Such an algorithm enables to eliminate effectively the convergence instability which used to appear in the iteration methods in solving the problems. The results of calculations of the lug teeth contact stresses are fitted with the experimental data quite well.

DOUBLE COMPATIBLE MODE SYNTHESIS OF SYMMETRIC STRUCTURES WITH C_n GROUP

Wang Wenliang

(*Fudan University*)

Zhu Nongshi and Xu Jiahua

(*Shanghai Ship & Shipping Research Institute*)

ABSTRACT

The success of implementing the mode analysis in the structural integrity research depends to a large extent on the ability to extract normal modes of the structures. In this paper, a new technique is proposed to combine the group theory algorithm and double compatible substructure method for analyzing rotationally symmetric (C_n) structures. In this method, only one sector ($1/n$ part of a structure) is taken and considered so as to obtain the normal modes of the whole structure. But for a large complicated structure, this sector still contains a lot of degrees of freedom (DOF) and is not suitable for direct solution by finite element method. For this reason a substructure method—double compatible mode synthesis method is employed. This technique enhances the extraction efficiency with the accuracy ensured by considerable reduction of synthetic scale through elimination of interface DOF, a numerical example is given to illustrate the merits of the presented technique.